Adı Soyadı: 14.06.2021
Numarası:

2020-2021 BAHAR DÖNEMİ CEBİR II FİNAL SINAVI SORULARI

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$: Reel Sayılar) için $x \oplus y = x + y - 1$ ve $x \odot y = x + y - xy$ ile $\mathbb{R}$ üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri tanımlanıyor. $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ bir halkadır. $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ üçlüsünün cisim olup olmadığını araştırınız.

2) a) R birimli ve değişmeli bir halka I ve J R'nin iki farklı maksimal ideali olsun. Bu durumda $I \cap J = IJ$ olduğunu gösteriniz.

   b) $x^3(x+3) + x^2(x+4) + 2(x^2+2x) - 1$ polinomunun $\mathbb{Q}[x]$ ve $\mathbb{Z}[x]$ halkalarında asal olup olmadığını araştırınız.

3) 169 elemanını kullanarak $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-17}\right]$ halkasının TAÇ bölge olup olmadığını belirleyiniz (Yol gösterme $169 = (4+3\sqrt{-17})(4-3\sqrt{-17})$) .

4) a) $\mathbb{Z}[i]$ de $-11+13i$ Gauss tam sayısını asal çarpanlara ayırınız.

   b) $-11+13i$ ve $-7+6i$ Gauss tam sayılarının obebini Öklid algoritması yoluyla bulunuz.

5) a) $\mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(13) \cong \mathbb{Z}/(78)$ olduğunu gösteriniz.

   b) $p(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$ polinomunu $\mathbb{Z}[x]$de asal çarpanlarına ayırınız.

Başarılar
Prof. Dr. Şenol EREN

Cebir 2 Final Cevap Anahtarı

1) $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ 'nın halka olduğu verilmiş. Bu halkanın cisim olması için halkanın sıfırından farklı her elemanının terslenebilir olması gerekir.

Halkanın sıfırını bulalım.

$x \oplus y = x+y-1$ old. $\quad x \oplus 0_{\mathbb{R}} = x \Rightarrow x + 0_{\mathbb{R}} - 1 = x$

$$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}} = 1$$

Halkanın birimini bulalım.

$x \odot y = x+y-xy$ old. $\quad x \odot 1_{\mathbb{R}} = x \Rightarrow x + 1_{\mathbb{R}} - x.1_{\mathbb{R}} = x$

$$\Rightarrow 1_{\mathbb{R}}(1-x) = 0,$$

$$\Rightarrow 1_{\mathbb{R}} = 0 \text{ dır.}$$

$\forall x,y \in \mathbb{R}$ için

$x \odot y = x+y-xy = y+x-yx = y \odot x$ old. halka değişmelidir. O halde halkanın cisim olması için $\forall x \neq 1$ için $x \odot y = 0$ o.ş. bir $y \in \mathbb{R}$ var olmalıdır.

$$x \odot y = 0 \Rightarrow x+y-xy = 0$$

$$\Rightarrow y(1-x) = -x$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x}{1-x} \in \mathbb{R}$$ olup $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ cisimdir.

2) a) R birimli ve değişmeli halkasının iki farklı maksimal ideali I ve J olsun. İki idealin çarpımı tanımından $I.J \subseteq I$ ve $IJ \subseteq J$ olup buradan

$I.J \subseteq I \cap J$ --- (1) --- elde edilir.

Ayrıca

$I \neq J$ olduğundan $\exists b \in J \setminus I$ için

$\langle I, b \rangle = \{a + br \mid r \in R\} = R$ olur. (I, R'nin maksimal ideali old)

$\langle I, b \rangle = R$ old. ve R birimli old. $1 = a + br$ ($a \in I$, $\exists r \in R$

yazılabilir

$I \cap J \subseteq IJ$ old. göst için keyfi bir $x \in I \cap J$ alalı.

$x \in I \cap J \Rightarrow x = x.1 = x(a+br)$

$= xa + xbr$

$= \underbrace{a}_{\in J}\underbrace{x}_{\in J} + \underbrace{x}_{\in I}\underbrace{br}_{\in J} \in I.J$

$I \cap J \subseteq IJ \ldots (2)$ bulunur

(1) ve (2) den istenen eşitlik elde edilir

2) b) $x^3(x+3) + x^2(x+4) + 2(x^2+2x) - 1$

polinomu düzenlersek $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1$ bulunur

O halde bu polinom $(x+1)^4 - 2$ yazılabilir

Eisenstein uygulanamaz. O halde

$f(x) = (x+1)^4 - 2$ denilirse

$f(x+1) = (x+2)^4 - 2 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 - 2$

$f(x+1) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 14$

olup $\pi = 2$ alınırsa Eisenstein'a göre

i) $2 \mid 14$, $2 \mid 32$, $2 \mid 24$, $2 \mid 8$

ii) $2 \nmid 1$

iii) $4 \nmid 14$

sağlanır. $f(x+1)$, $\mathbb{Q}[x]$ de asaldır O halde $f(x)$ de $\mathbb{Q}[x]$ de asaldır Polinom ilkel old. $\mathbb{Z}[x]$ de de asaldır.

CamScanner ile tarandı

3) $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ halkasında

$$169 = 13.13 = (4+3\sqrt{-17})(4-3\sqrt{-17})$$

yazılabilir 13 indirgenemez olur mu?

$13 = \alpha.\beta$

$\Rightarrow 169 = d(\alpha).d(\beta)$

$\Rightarrow d(\alpha) = 1, 13, 169$ (1 ve 169 da α ve β birimseldir)

O halde $d(\alpha) = 13$ $\Rightarrow a^2 + 17b^2 = 13$ olan $a, b \in \mathbb{Z}$ var mı?

Bunu sağlayan $a, b \in \mathbb{Z}$ yoktur Yani 13 indirgenemez elemandır

Şimdi de $4+3\sqrt{-17} = \theta.\gamma$ olsun.

$d(4+3\sqrt{-17}) = d(\theta).d(\gamma)$

$169 = d(\theta).d(\gamma)$

$\Rightarrow d(\theta) = 1, 13, 169$

$d(\theta) = 13 \Rightarrow a^2 + 17b^2 = 13$

Yukarıdakine benzer şekilde $4+3\sqrt{-17}$ ve $4-3\sqrt{-17}$

aş $a, b \in \mathbb{Z}$ yoktur Yani

indirgenemez elemandır

Bu durumda $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ halkasında 169 elemanı tek türlü parçalanışa sahip değildir O halde

$\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ TAG bölge değildir

4) a) $\mathbb{Z}[i]$ de $-11+13i$ Gauss tam sayısını asal çarpanlarına ayıralım.

$$-11+13i = \alpha.\beta$$
$$d(-11+13i) = d(\alpha).d(\beta)$$
$$290 = d(\alpha).d(\beta)$$
$$\Rightarrow d(\alpha) = 1,2,5,10,29,290$$

$d(\alpha)=2 \Rightarrow \alpha = 1+i$ alınırsa

$$\frac{-11+13i}{1+i} = \frac{(-11+13i)(1-i)}{2} = 1+12i$$

$1+12i = \theta.\gamma$ denilirse

$$d(1+12i) = d(\theta)d(\gamma)$$
$$145 = d(\theta).d(\gamma)$$
$$\Rightarrow d(\theta) = 1,5,29,145$$

$d(\theta)=5 \Rightarrow \theta = 2-i$ için

$$\frac{1+12i}{2-i} = \frac{(1+12i)(2+i)}{5} = \underset{\text{asaldır.}}{5i-2}$$

$$-11+13i = (1+i)(2-i)(5i-2)$$

b) $-11+13i$ ve $-7+6i$ 'nin eboblarını bulalım

$$\frac{-11+13i}{-7+6i} = \frac{(-11+13i)(-7-6i)}{85}$$
$$= \frac{155-25i}{85} \cong 2$$

$$-11+13i = (-7+6i)2 + K_1$$
$$\Rightarrow K_1 = 3+i$$

$$\frac{-7+6i}{3+i} = \frac{(-7+6i)(3-i)}{10}$$
$$= \frac{-15+25i}{10} \cong -1+2i$$

$$-7+6i = (3+i)(-1+2i)+K_2$$
$$\Rightarrow K_2 = -2+i$$

$$\frac{3+i}{-2+i} = \frac{(3+i)(-2-i)}{5} = \frac{-5-5i}{5}$$
$$= -1-i$$

$$3+i = (-2+i)(-1-i) + k_3$$
$$\Rightarrow k_3 = 0$$

O halde ebob $k_2 = -2+i$ bulunur
(Ebob $-2+i$ ya da $\mathbb{Z}[i]$ de onunla ilgili olan elemanlardan biridir)

5 a) Homomorfizma (1. izo) teo. kullanalım.

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(13)$$
$$a \longrightarrow f(a) = (a+(6), a+(13))$$

ile tanımlanırsa f'nin kapalı ve iyi tanımlı old. açıktır.
O halde f fonksiyonunun homomorfizma old. gösterelim

* $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için
$$f(a+b) = (a+b+(6), a+b+(13))$$
$$= (a+(6)+b+(6), a+(13)+b+(13))$$
$$= (a+(6), a+(13)) + (b+(6), b+(13))$$
$$= f(a) + f(b)$$
$$f(ab) = (ab+(6), ab+(13))$$
$$= ((a+(6))(b+(6)), (a+(13))(b+(13)))$$
$$= ((a+(6), a+(13)) \cdot (b+(6), b+(13))$$
$$= f(a) \cdot f(b)$$

old. f homomorfizmadır
Şimdi f'nin örtenliğini gösterelim.
$(6,13) = 1$ old. $\mathbb{Z} = (6) + (13)$ yazılabilir için $a,b \in \mathbb{Z}$ olup
$\forall (a+(6), b+(13)) \in \mathbb{Z}/(6) \times \mathbb{Z}/(13)$ alınırsa

$a = 6x+13y$ ve $b = 6x'+13y'$
$$f(13y+6x') = (13y+6x'+(6), 13y+6x'+(13)) = (13y+(6), 6x'+(13))$$
$$= (a+(6), b+(13))$$

0.5 $\exists\, 13y+6x' \in \mathbb{Z}$ vardır O halde f örtendir

Şimdi f'nin çekirdeğini bulalım.

$$\begin{aligned}
\text{Çek} f &= \{ a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = ((6),(13)) \} \\
&= \{ a \in \mathbb{Z} \mid (a+(6), a+(13)) = ((6),(13)) \} \\
&= \{ a \in \mathbb{Z} \mid a+(6)=(6),\ a+(13)=(13) \} \\
&= \{ a \in \mathbb{Z} \mid a \in (6),\ a \in (13) \} \\
&= \{ a \in \mathbb{Z} \mid a \in (78) \} \\
&= (78)
\end{aligned}$$

Homomorfizma teo. göre $\mathbb{Z}/_{(78)} \cong \mathbb{Z}/_{(6)} \times \mathbb{Z}/_{(13)}$ bulunur.

5 b) $p(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$ polinomunu $\mathbb{Z}[x]$ de asal çarpanlarına ayırmak yerine dereceler aynı kalacak şekilde $\mathbb{Z}_2[x]$ de ayırabiliriz. Polinom $\mathbb{Z}_2$'ye göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\bar{p}(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x &= x\,(x^4 + x^3 + x + \bar{1}) \\
&= x\,(x^3(x+\bar{1}) + x + \bar{1}) \\
&= x\,(x+\bar{1})(x^3+\bar{1}) \\
&= x\,(x+\bar{1})(x+\bar{1})(x^2+x+\bar{1}) \\
&= x\,(x+\bar{1})^2(x^2+x+\bar{1})
\end{aligned}$$

$x^2+x+\bar{1}$ $\mathbb{Z}_2[x]$ de asal ve dolayısıyla $\mathbb{Z}[x]$ de asal

$$\begin{array}{l|l}
x^5+x^4+x^2+x+2 & x^2+x+1 \\
\hline
 & x^3-x+2 \\
= & \\
0 &
\end{array}$$

O halde $p(x)$'in $\mathbb{Z}[x]$ de asal çarpanları

$$p(x) = (x^2+x+1)(x^3-x+2)$$